射影平面と Bézout の定理

坂内研究室 学部 4 年 茶堂賢 中岡周太郎 横山晴哉 高林歩悠人

September 2, 2021

射影平面

定義 1

$\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ に $(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ st.$(x,y,z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z')$ で同値関係を入れる．このとき商集合 $(\mathbb{C}^3\backslash\{0\})/\sim$ を $\mathbb{P}^2$ と表し，複素射影平面という．つまり $(\lambda x', \lambda y', \lambda z')$ と (x',y',z') を同じ点と見なすような空間が射影平面ということである．(x,y,z) で表される $\mathbb{P}^2$ の代表元を $[x:y:z]$ で表す．

定義 2

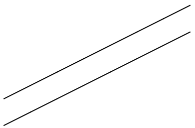
$f(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ を定数でない斉次多項式 (0 でない項の次数が等しい多項式) とする．このとき $V(f) := \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid f(x,y,z) = 0\}$ と定める．部分集合 $C \subset \mathbb{P}^2$ がある定数でない斉次方程式によって $C = V(f)$ となるとき射影曲線という．また，f が平方因子を持たないとすると f は定数倍を除いて一意に定まる．このとき $deg f$ を C の次数という．

定数でない多項式同士の積に分解できないとき f は既約という．f が既約のとき $C = V(f)$ を既約ということにする．C が射影曲線のとき $C = C_1 \cup ... \cup C_n (C_1, ..., C_n$ は既約) という形で一意に分解できる．$C_1, ..., C_n$ を既約成分という．

例 1. $x + y + z = 0$ で定まる射影曲線は直線を表す．
例 2. $y^2 z - x^3 + xz^2 = 0$ で定まる射影曲線は楕円曲線を表す．
例 3. C を $(x+y+z)(x+2y+z) = 0$, C_1 を $x+y+z = 0$, C_2 を $x+2y+z = 0$ から定まる曲線とすると $C = C_1 \cup C_2$ と既約成分に分解できる．

射影平面

射影平面とは通常の平面 $\mathbb{C}^2$ に無数の無限遠点と呼ばれるものを加えたものと見なすことができる．$\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{P}^2$ へ $(x,y) \mapsto [x:y:1]$ で埋めこむことができる．この埋め込みの補集合の点 $[x:y:0]$ が無限遠点となる．射影平面では二つの直線は必ず一点で交わる．



$\mathbb{C}^2$ で平行な二直線
$x+2y+1=0$, $x+2y=0$ は $\mathbb{C}^2$ では交わらない．
一方でこれらに対応する $\mathbb{P}^2$ の直線 $x+2y+z=0$,
$x+2y=0$ は無限遠点 $[2:1:0]$ で交わる．

Bézout の定理

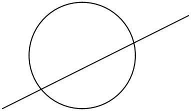
これから以下の定理を示す．

定理 3 (Bézout の定理)

$C, D \subset \mathbb{P}^2$ を共通の既約成分を持たない射影曲線とする．このとき C, D の次数をそれぞれ m, n とすると $C \cap D$ は空でなく，C, D の交点の個数は mn 個以下である．

共通の既約成分を持たない射影曲線とは，二つの曲線の共通する点が有限個であることを意味する．例えば二つの曲線を同じ曲線として考えると交点は無数にあり定理の仮定を満たさない．

2 次の曲線である円と
1 次の曲線である直線は 2 つの交点を持つ．
これを一般化したものが上の定理である．



Bézout の定理

以下, $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ $(a_0 \neq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C})$, $Q(x) = b_0 x^m + \dots + b_m$ $(b_0 \neq 0, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C})$ とする.

定義 4 (終結式)

$R(P,Q)$ を $m+n$ 行列式

$$\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & & & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & & & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & & \cdots & & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & & \cdots & & & b_0
\end{vmatrix}$$

として P, Q の終結式という. $R(P,Q)(y,z)$ を $\mathbb{C}[y,z]$ を係数とする多項式に対し同様に定義する.

Bézout の定理

例 1. $P(x) = x^2 + 2x + 1$ と $Q(x) = x + 1$ の終結式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ により定義される.

例 2. $P(x) = x^2 + y^2 - z^2$ と $Q(x) = x - z$ の終結式は $\begin{vmatrix} y^2 - z^2 & 0 & 1 \\ -z & 1 & 0 \\ 0 & -z & 1 \end{vmatrix}$ により定義される.

補題 5

$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ が共通解を持つためには $R(P, Q) = 0$ であることが必要十分である.

(証明) $P(x)$ と $Q(x)$ が共通因子 $R(x)$ を持つ.
$\Longleftrightarrow P(x) = R(x)\phi(x),\ Q(x) = R(x)\psi(x)$ と書ける.
$\phi(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}$
$\psi(x) = \beta_0 x^{m-1} + \cdots + \beta_{m-1}$ とすると係数比較することにより
$R(P, Q) = 0$ と同値であることがわかる.

Bézout の定理

例. $P(x)=x^2-x-2=0,\ Q(x)=x-2$ とすると終結式は $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ となる.

補題 6

$P(x,y,z)$ と $Q(x,y,z)$ を定数でない斉次多項式で $P(1,0,0)\neq 0\neq Q(1,0,0)$ となるものとする.
このとき $P(x,y,z)$ と $Q(x,y,z)$ が定数でない斉次の共通因子を持つ.
$\Longleftrightarrow R(P,Q)(y,z)=0.$

(証明) $P(1,0,0)=1=Q(1,0,0)$ としてよい. $P(x,y,z)$ と $Q(x,y,z)$ は $\mathbb{C}[y,z]$ を係数とするモニックな多項式 (x の最高次の係数が 1 である) とすることができる. $\mathbb{C}(y,z)$ に関して補題 5 を用いることにより $R(P,Q)(y,z)=0$ であることは $P(x,y,z)$ と $Q(x,y,z)$ が $\mathbb{C}(y,z)$ を係数とする多項式として共通因子を持つことが必要十分である. Gauss の補題を用いると $\mathbb{C}[y,z]$ を係数とする多項式についても同じとわかる.

Bézout の定理

補題 7

$P(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$
$Q(x) = (x-\mu_1)\cdots(x-\mu_m)$ とすると，$R(P,Q) = \prod_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(\mu_j - \lambda_i)$．また
$R(P,QR) = R(P,Q)R(P,R)$ である．

(証明) 略．

補題 8

$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ をそれぞれ次数 m，n の斉次多項式とする．このとき $R(P,Q)(y,z)$ は次数 mn の斉次多項式．

(証明) $R(P,Q)(y,z)$ は ij 成分は斉次多項式 $r_{ij}(y,z)$ の行列式で与えられる．r_{ij} の次数を d_{ij} とすると，

$$d_{ij} = \begin{cases} n+i-j & (1\le i\le m) \\ i-j & (m+1\le i\le n+m) \end{cases}$$

$R(P,Q)(y,z)$ は $\pm\prod_{i=1}^{n+m} r_{i\sigma(i)}(y,z)$ の和であり，この各項は $\sum_{i=1}^{n+m} d_{i\sigma(i)} = n+m$ 次の斉次多項式である．

補題 9

$\mathbb{P}^2$ の任意の射影曲線は少なくとも一つの交点を持つ.

射影空間で二つの直線が必ず交点を持つことは上で紹介した．それの一般化である．

(証明) C と D がそれぞれ n, m 次の斉次多項式 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ で与えられたとする．$R(P,Q)(y,z)$ は 0 または $(bz-cy)$ の形の mn 個の積．どちらの場合も $R(P,Q)(b,c)=0$. 補題 5 を $P(x,b,c)$, $Q(x,b,c)$ に用いると，ある $a \in \mathbb{C}$ が存在し $P(a,b,c)=Q(a,b,c)=0$.

(Bézout の定理の証明) C と D が少なくとも $nm+1$ 個の交点を持つとすると C と D が共通成分を持つことを示す．S を $C \cap D$ の $nm+1$ の交点とする．C または D または S の任意の 2 点を結ぶ直線を通らない点を選ぶ．射影変換により，この点を $[1:0:0]$ とすることができる．このとき $P(1,0,0,) \neq 0 \neq Q(1,0,0)$. 補題 8 により $R(P,Q)(y,z)$ は 0 でないなら $(bz-cy)$ の形の mn 個の積．補題 5 より $(bz-cy)$ が $R(P,Q)(y,z)$ の因子であることは $P(a,b,c)=0=Q(a,b,c)$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在することと同値である．よって $[a:b:c] \in S$ なら $P(a,b,c)=0=Q(a,b,c)$ かつ b, c は同時に 0 にならないので $(bz-cy)$ は $R(P,Q)(y,z)$ の因子．$[\alpha:\beta:\gamma] \in S$ が $[a:b:c]$ と違うなら $\beta z-\gamma y$ は $bz-cy$ の定数倍でない．そうでないなら $[a:b:c]$, $[\alpha:\beta:\gamma]$, $[1:0:0]$ が直線 $bz=cy$ 上にあり矛盾．これより $R(P,Q)(y,z)$ は $nm+1$ 個の異なる因子を持つ．よって $R(P,Q)(y,z)=0$ で補題 6 より示された．

Bézout の定理

例 1. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ と $x - z = 0$ は交点 $[1 : 0 : 1]$ をもつ.
例 2. $x^2 + y^2 - 2yz = 0$ と $x^2 - 4yz = 0$ は $[0 : 0 : 1]$ と $[\pm 2\sqrt{2}i : 2 : -1]$ の 3 つの交点を持つ.

注. 交叉重複度というものを考えることにより m 次曲線と n 次曲線は mn 個の交点を持つことがわかる.

(参考文献)

代数幾何学 1, R. ハーツホーン (訳:高橋宣能, 松下大介), 丸善出版, 2013
代数幾何, 上野健爾, 岩波書店, 2005
Complex algebraic curves, Kirwan, Frances Clare, Cambridge University Press, 1992